博士（理　学）　山　上　敦　士

学位論文題名

On Gouvêa's Conjecture in the Unobstructed Case

（変形問題が非障害な場合におけるグベアの予想について）

学位論文内容の要旨

p を奇素数, N を p と素な正整数, $\boldsymbol{k}$ を標数 p の有限体, $G_{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ 上の絶対ガロア群とし, 絶対既約な剰余ガロア表現 $\bar{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{k})$ はレベル $Np^{\nu}(\nu \geq 0)$ の古典的なヘッケ固有形式 f から来るモジュラー表現であるとする. このとき, $\bar{\rho}$ は f に付随するという. S を p, ∞ そして N の素因数からなる有限集合とするとき, $\bar{\rho}$ は S の外で不分岐であり, $\mathbb{Q}$ 上 S の外で不分岐な最大ガロア拡大のガロア群 G_S の表現より得られる.

$\boldsymbol{k}$ を剰余体にもつ完備局所ネター環 A への $\bar{\rho}$ の持ち上げ $\rho: G_S \to \mathrm{GL}_2(A)$ の同値類を, $\bar{\rho}$ の A への変形とよぶ. B. メーザーは, 完備局所ネター環 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ と $\bar{\rho}$ の変形 $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{univ}}: G_S \to \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S))$ で, 次の普遍性を持つものを構成した:

> 任意の変形 $\rho: G_S \to \mathrm{GL}_2(A)$ に対し, 環準同型 $\varphi: \boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to A$ で, $\varphi \circ \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{univ}}$ が ρ と同値になるものが唯一つ存在する.

この $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ を $\bar{\rho}$ の普遍変形環という.

一方, F. Q. グベアにより, $\bar{\rho}$ の変形の中で, 特に N. M. カッツ氏の p 進保型形式に付随するものに対して, 上記の普遍性を持つ完備局所ネター環 $\boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ と $\bar{\rho}$ の変形 $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{mod}}: G_S \to \mathrm{GL}_2(\boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N))$ が構成された. これを, 普遍モジュラー変形環とよぶ.

$\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ の普遍性により得られる射 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ は全射であるが, さらに単射性について次の予想が立てられている:

グベアの予想 上述の設定のもと, 全射 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ は同型である.

これは, モジュラーな剰余ガロア表現 $\bar{\rho}$ の全ての変形は, カッツの p 進保型形式に付随することを意味している.

本論文の主結果は次の定理である:

主定理 もし $\bar{\rho}$ に対する変形問題が非障害であるならば, グベアの予想は正しい.

ここで, $\bar{\rho}$ に対する変形問題が非障害であるとは, $\bar{\rho}$ に付随する随伴表現

$\mathrm{Ad}(\bar{\rho})$ の 2 次元ガロアコホモロジー群 $H^2(G_S, \mathrm{Ad}(\bar{\rho}))$ が 0 となることをいう.

主定理の証明方針は,

(1) $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S) \to \boldsymbol{T}(\bar{\rho}, N)$ の単射性を, $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ のスペクトラム $\mathrm{Spec}\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ における, 古典的な固有形式から来るモジュラーな点からなる部分集合 $\mathcal{X}$ の稠密性に帰着させる;

(2) $\bar{\rho}$ の普遍変形空間 $X = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}W(\boldsymbol{k})-\mathrm{alg}}(\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S), \mathcal{O})$ 内の, 古典的な固有形式から来るモジュラーな点からなる部分集合を, R. F. コールマンにより構成された p 進固有形式の族を用いて, p 進解析的な手法で調べることにより, $\mathcal{X}$ の稠密性を示す;

というものである. ここで, $W(\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}$ 上のビット環であり, $\mathcal{O}$ は $\bar{\rho}$ が付随する固有形式 f のフーリエ係数を全て $\mathbb{Q}_p$ に添加した体 K の整数環である.

$\bar{\rho}$ に対する変形問題が非障害であるとき, 普遍変形環 $\boldsymbol{R}(\bar{\rho}, S)$ は $W(\boldsymbol{k})$ 上の 3 変数形式的冪級数環と同型であるので, 普遍変形空間 X は 3 次元の滑らかな K-解析的多様体とみなせることが, (2) におけるキーポイントである.

コールマンの p 進固有形式の族を用いて, グベアの予想を証明するこの方法は, グベアとメーザーにより,

(i) $K = \mathbb{Q}_p$; (ii) $\bar{\rho}$ が付随する固有形式 f のレベルが p である;

という仮定のもとで初めて示されたものである. 本論文の前半で, 仮定 (i) はそのままで, 仮定 (ii) における f のレベルを p から Np (N は p と素な正整数) に拡張した場合を, 後半では, 仮定 (i) における K が一般の p 進体で, 仮定 (ii) における f が任意のレベルの一般的な場合を扱っている.

学位論文審査の要旨

主　査　　助教授　　前　田　芳　孝

副　査　　教　授　　三　宅　敏　恒

副　査　　教　授　　山　下　　博

学 位 論 文 題 名

On Gouvêa's Conjecture in the Unobstructed Case

(変形問題が非障害な場合におけるグベアの予想について)

全てのガロア表現の変形がモジュラー形式から得られるか否かということはガロア表現論の基本問題であり，特別な場合の解決はワイルス-テーラーにより，志村-谷山予想及びフェルマー予想の解決を齎した．本論文は，この基本問題を緩やかな仮定の下で解決したものである．

１変数のヘッケ作用素に対する固有形式から生じる絶対既約な剰余ガロア表現に対して，メーザーは完備局所ネータ環上への変形で最も普遍的なガロア表現が存在することを示した．一方，グベアはカッツの p-進保型形式から得られるものに対して同様な普遍的なガロア表現を構成し，この２つのガロア表現は同値であることを予想として提出した．

グベアとメーザーはこの予想が成り立つことを，剰余ガロア表現が非障害な場合に加え，与えられた固有形式が p-進整数環上定義され，且つそのレベルが素数 p で non-slope であるというかなり制約された場合に証明した．

本論文は，彼らの手法を一般の局所体上に拡張し，更に，与えられた固有形式の代わりに都合の良い固有形式を取り直せることができることを示すことにより，slope，non-slope に関係なく，固有形式の定義環やレベルについても何らの条件を仮定せずに，剰余ガロア表現が非障害という条件だけの下でグベアの予想が成り立つことを示したものである．

非障害という条件は付くが，この条件は与えられた固有形式に対して，有限個の素数 p を除いて成り立つものと予想されており，それほど強い条件ではないと思われる．

本論文の結果は，特別の場合に志村-谷山予想の解決を齎したように，整数論に於いて多くの成果を生むものと期待される．

要するに，著者はガロア表現の変形問題に於いて重要な貢献をなしたといえる．

よって著者は，北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める．