博士（理学）　髙　棹　圭　介

学位論文題名

Surface evolution for Landau-Lifshitz equation and mean curvature flow with transport term

（Landau-Lifshitz 方程式と移流項付き平均曲率流における曲面の発展）

学位論文内容の要旨

本研究では Landau-Lifshitz 方程式と移流項付き平均曲率流の二種類の偏微分方程式についての解析を行った。特に物理現象として曲線、曲面の発展と対応している数学的問題に焦点を当てた。本論文の第 1 章では本研究に関する記号の定義、修正可能集合、Radon 測度、Varifold の基礎的な事柄について述べる。

第 2 章では以下の Landau-Lifshitz 方程式を考える:

$$\partial_t m = m \times \nabla_{L^2} E(m) + \eta m \times \partial_t m. \tag{1}$$

ここで $m = (m_1, m_2, m_3) : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to S^2$、$\eta > 0$ は Gilbert loss parameter と呼ばれる物理定数、∇_{L^2} は L^2-gradient、$E(m)$ は以下で与えられるものである。

$$E(m) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x m|^2 \, dx + \frac{a}{2}\int_{\mathbb{R}} m_1^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (1 - m_2^2) \, dx - \int_{\mathbb{R}} m \cdot (0, h, 0) \, dx.$$

但し、$a > 0$ は物理定数、$h \in \mathbb{R}$ は定数であり外部磁場を表す。Landau-Lifshitz 方程式は、強磁性体内の磁化ベクトルの変化を記述する動的モデル方程式である。強磁性体内部では、隣り合う磁化ベクトル同士でその向きを揃えようとする相互作用が起こる。この作用によって磁化ベクトルが揃っている領域 (磁区) と、向きが違う磁区同士の境界 (磁壁) が幾何学的模様となって現れることが知られている。磁壁の一種として Walker 壁がある。Walker 壁は強磁性体の薄膜の内部に外部磁化を与えた時に発生する直線状の磁壁である。Walker 壁は基礎的な磁壁の一種として知られており、Landau-Lifshitz 方程式 (1) における travelling wave 解 (以下 Walker 解と呼ぶ) として記述される。本研究では、外部磁場の絶対値 $|h|$ が十分小さい場合、Walker 壁が漸近安定であることを示した。ここで漸近安定とは、Walker 解 $M(t)$ に対して、初期値 $M(0)$ と $m(0)$ が H^1 ノルムの意味で近い (1) の解 $m(t)$ に対して、ある定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して $\|m(\cdot, t) - M(\cdot - \alpha, t)\|_{H^2} \to 0 (t \to \infty)$ を満たすことである。

第 3, 4 章では移流項付き平均曲率流について述べる。本研究における移流項付き平均曲率流とは、n 次元ユークリッド空間における超曲面 $\Gamma(t)$ の速度 V_t が以下を満たすことである:

$$V_t = H + (u \cdot \nu)\nu \qquad \text{on} \qquad \Gamma(t). \tag{2}$$

ここで、H は平均曲率ベクトル、$u = u(x,t)$ は既知のベクトル値関数、ν は $\Gamma(t)$ の単位法線ベクトルである。通常の平均曲率流、つまり $u = 0$ のときは多くの数学者によって研究されている。本研究の目的は、移流項付き平均曲率流 (2) に対する勾配評価、解の存在である。研究動機は、一つ目として平均曲率流がどの程度の摂動を許容出来るのかという問題が挙げられる。二つ目として、(2) が後に述べるナビエ - ストークス方程式とのカップリング問題に対する簡略化として見做せることが挙げられる。具体的には血液中の赤血球の表面の薄膜の物理モデル等に対応している ($\Gamma(t)$ が時刻 t における薄膜の形状, u が血流を表している)。1978 年に Brakke は、幾何学的測度論を用いて平均曲率流 ($u = 0$) の弱解 (Brakke の平均曲率流) の存在を示した。一方、(2) に対しては Liu-Sato-Tonegawa によって $n = 2, 3$ のときの $\Gamma(t)$ の弱解の存在が示されている。

第 3 章では、$\Gamma(t)$ がグラフで表される場合に限ることにより、移流項付き平均曲率流の勾配評価及び古典解の存在を証明した。勾配評価自体は最大値原理を用いて得ることも出来る。しかし、それにより得られる勾配評価は $\sup|u|, \sup|\nabla u|$ に依存してしまうが、本章の主結果の勾配評価は、u に関しては $\sup|u|$ にのみ依存するところが優れている点として挙げられる。勾配評価の手法としては Huisken の単調性公式を応用した。古典解の存在は勾配評価により放物型偏微分方程式の理論を用いて示される。これにより簡素な方法で移流項付き平均曲率流の解の構成が可能となった。

第 4 章では、(2) の弱解の存在について述べる。申請者は指導教官の利根川吉廣教授との共同研究により、Liu-Sato-Tonegawa の結果の仮定で必要だった次元に関する条件 ($n = 2, 3$) を取り除き、(2) の Brakke の平均曲率流 (弱解) の存在の証明に成功した。但し $u \in L^q([0,\infty); (W^{1,p}(\Omega))^n), p \geq 2, q > 2, p > \frac{n}{2} \cdot \frac{q}{q-1}, \Omega = \mathbb{T}^n$ である。証明には二層流体のモデル方程式である Allen-Cahn 方程式の解の特異極限を用いて $\Gamma(t)$ を構成する手法 (フェイズフィールド法) を用いた。証明の要は超曲面 $\Gamma(t)$ の多重度に関する評価である。多重度は、曲面の重なり合う枚数の数学的な抽象化された概念であり、それ故多重度が整数値であることを示す必要がある。本研究ではフェイズフィールド法により構成された $\Gamma(t)$ の多重度が、殆ど至る所の時刻 t に対して整数値を取ることを示した。

学位論文審査の要旨

主　査　　教　授　　利根川　吉　廣
副　査　　教　授　　相　川　弘　明
副　査　　教　授　　高　岡　秀　夫

学 位 論 文 題 名

Surface evolution for Landau-Lifshitz equation and mean curvature flow with transport term

(Landau-Lifshitz 方程式と移流項付き平均曲率流における曲面の発展)

博士学位論文審査等の結果について（報告）

高棹氏は当該論文において時間空間変数に依存する2種類の非線形偏微分方程式に関する数理的な研究を行っている。それらは（1）強磁性体の磁化ベクトルの動きを描写するLandau－Lifshitz方程式、（2）移流項付きの平均曲率流方程式である。

（1）強磁性体磁化ベクトルの動的状態はエネルギー変分原理から導出されるLandau－Lifshitz方程式によって描写される事が知られている。磁化ベクトル同士の近距離相互作用は隣あう磁化ベクトルの向きを揃えようとする効果があるため一様な向きをもつ領域が大部分を占める一方、中長距離相互作用または外部磁場等に起因して急激に向きが変化する磁壁が観察される。磁壁は様々な幾何学的模様となって実験的に観察され、工学的かつ数理学的に興味深い研究対象である。最も単純な直線的磁壁はBloch壁と呼ばれ、これはLandau－Lifshitz方程式の1次元定常ヘテロクリニック解に対応している。Bloch壁に一様な外部磁場を作用させると空間移動するのであるが、その移動現象を表す解のひとつにWalker壁がある。数理的に言えば、これはLandau－Lifshitz方程式のtravelling wave解であり、解の明示的表示もあるものである。このWalker壁に関する既知の結果としては、外部磁場が弱い場合は安定的な挙動が観測され、ある閾値以上の外部磁場の下ではカオス的な挙動をすることが複数の物理系分野の論文で報告されている。この点に着目し、本論文は、Walker壁が十分外部磁場の影響が小さい場合に付いては指数的に漸近安定である事を厳密に証明した。技術的に困難な点は、Walker壁を表す解には1次元の平行不変性があることで、その安定性を示す為には単なる線形化と固有値解析では十分ではない点である。様々な物理パラメターと漸近安定性との関係が明らかになった点についても新規性があり、数学的に興味深いのみならず科学的観点からも有意義な結果である。

（2）一般n次元ユークリッド空間内の、時間変数によってパラメター付けされたk次元曲面の族を考える。各点各時刻において、曲面の速度ベクトルがその平均曲率ベクトルに等しいとき、これら曲面族は平均曲率流であるという。平均曲率流は幾何学的時間発展問題において最も重要な研究対象のひとつであり、特に1980年代より数多くの研究者による研究結果が得られている一方、平均曲率流の摂動的な側面、つまり速度ベクトルが平均曲率から移流効果によりずれている場合についての研究はほとんど無かったといってよい。移流効果は、2相流体等の界面現象を数理モデル化した際には重要な構成要因となり、その研究は応用面から見て有意義である。近年、フェイズフィールド法を用いた移流効果を含む解の存在定理が得られたことにより、

この方面の研究が進みつつあるが、本論文では、特に曲面がグラフで表される場合の短時間存在定理、及びグラフとは限らない一般の場合の時間大域解の存在定理について証明されている。前者に関しては移流効果のため、グラフの形での時間大域解の存在は一般には得られないことが容易に分かるため、短時間での存在定理になっているが、その存在時間が初期グラフの高さのみによって決まることが分かるなど、新規性の高い結果である。後者の一般の場合については、移流効果にあたる流速場のソボレフ空間の可積分条件がシャープな形で得られており、また佐藤ーLiuー利根川の2012年の次元2、3のみであった結果を一般次元に拡張しているなど、当該分野において高く評価される結果である。

これら顕著な成果より著者は北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格があるものと認められる。